SYNTHÈSES

Principe et mise en œuvre de l'analyse temps-fréquence par transformation de Wigner-Ville

Principle and application of time-frequency analysis by means of the Wigner-Ville transform



Patrick FLANDRIN

Laboratoire de Traitement du Signal, LA 346 *b,* CNRS, ICPI, 25, rue du Plat, 69288 LYON CEDEX 02 GRECO, CNRS 69, « Systèmes adaptatifs »

Ingénieur, ICPI, Lyon en 1978. Docteur-Ingénieur, INPG, Grenoble en 1982. Attaché de recherches au CNRS. Principaux domaines d'intérêt : représentation temps-fréquence et méthodes non stationnaires; liens entre Théorie du Signal et Mécanique Quantique; étude des systèmes sonar animaux.



Bernard ESCUDIÉ

Laboratoire de Traitement du Signal, LA 346 *b*, CNRS, ICPI, 25, rue du Plat, 69288 LYON CEDEX 02

Enseignement et Recherche en Traitement et Analyse des Signaux; professeur à l'ICPI, responsable du LA 346 *b* CNRS. Domaine de recherche : représentations conjointes temps et fréquence des signaux certains et aléatoires; imagerie spatiofréquentielle des sources sonores mobiles; étude des systèmes sonars animaux aériens; histoire des Sciences et Techniques à propos de la thermodynamique et du Traitement du Signal.

RÉSUMÉ

La transformation de Wigner-Ville occupe une place centrale dans l'analyse temps-fréquence des signaux. On se propose dans cet article de rappeler l'intérêt d'une telle transformation en insistant sur les problèmes pratiques posés par sa mise en œuvre et son interprétation. On discute particulièrement le choix des fonctions de lissage à utiliser pour obtenir des performances supérieures à celles des méthodes classiques à base de transformée de Fourier à court terme. Ceci fournit un cadre non paramétrique très général, tant pour l'analyse de signaux déterministes modulés que pour l'estimation de spectres dépendant du temps dans le cas de processus non stationnaires

MOTS CLÉS

Wigner-Ville, représentations temps-fréquence, analyse spectrale, signaux non-stationnaires.

SUMMARY

The Wigner-Ville transform is known to be a very powerful tool for signal processing in the time-frequency plane. This paper is devoted to emphasize the capability and versatility of this transform with special focus on interpretation problems and practical realization requirements. The problem of efficiently smoothing a Wigner-Ville distribution is addressed and solutions are proposed to improve the performances obtained via short-time Fourier analyses. This defines a very general non-parametric framework, including the time-frequency analysis of deterministic signals as well as estimation procedures for time-varying spectra of non-stationary processes.

KEY WORDS

Wigner distribution, time-frequency representations, spectral analysis, non-stationary signals.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction

La transformation de Fourier, en permettant une description simple des relations entrée-sortie des filtres linéaires, occupe une place privilégiée dans la théorie et le traitement des signaux. Néanmoins, la nature même de cette transformation ne peut donner d'un signal temporel qu'une information fréquentielle globale de laquelle toute notion de chronologie a disparu : son champ d'application naturel est l'analyse des signaux stationnaires. Ainsi, dès lors que l'on considère des signaux modulés ou des processus non stationnaires, une analyse spectrale classique fournit une information moyennée sur la durée d'observation et donc peu caractéristique de la structure instantanée du signal étudié. Une solution partielle à ce problème, la plus intuitive et naguère la plus populaire, consiste à associer à un signal non stationnaire une suite de transformées de Fourier à court terme en essayant d'adapter les fenêtres d'observation successives aux variations de structure du signal de telle sorte que les hypothèses de stationnarité, limitatives de ce genre de méthode, soient localement satisfaites. De telles tentatives se heurtent malheureusement à une nécessité de compromis insurmontable entre les résolutions temporelle et fréquentielle. Une deuxième solution, plus satisfaisante, consiste à chercher directement un outil adapté à l'étude de phénomènes non stationnaires, sans référence directe aux méthodes issues du cas stationaire. Dans cet esprit, un regain particulier d'intérêt se manifeste depuis quelques années pour une transformation proposée en Mécanique Quantique par E. P. Wigner [1]. Cette transformation permet de définir ce que nous conviendrons d'appeler la distribution de Wigner-Ville (DWV) en référence et hommage à J. Ville qui, le premier, introduisit cette même notion en Théorie du Signal. La DWV est maintenant bien connue mais, quoique ses avantages aient été souvent remarqués, certains des problèmes d'interprétation qu'elle soulève ont semblé freiner son utilisation effective comme alternative avantageuse aux analyses spectrales à court-terme classique. On se propose ici d'en présenter les principes de base ainsi que les modifications nécessaires conduisant à la possibilité d'une telle utilisation.

L'ensemble de l'article s'appuie sur des résultats pour la plupart déjà connus, le souci premier étant de les rassembler d'une manière homogène au service d'une présentation générale, d'un mode d'emploi, de la méthode.

2. La distribution de Wigner-Ville

Par définition, la transformation de Wigner-Ville (TWV) associe à un signal temporel x d'énergie finie la fonction W_x des deux variables temps t et fréquence ν :

$$(1)\quad W_x(t, \nu)=\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-i2\pi\nu\tau}\,d\tau.$$

Cette fonction, appelée distribution de Wigner-Ville (DWV) [1, 2], possède un grand nombre des propriétés souhaitables pour une représentation temps-fréquence. En particulier, et sans reprendre les discussions exhaustives données dans [3, 5], on peut rappeler que :

(i) la DWV est une fonction réelle répartissant l'énergie d'un signal dans le plan temps-fréquence :

$$(2)\quad \iint_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \nu)\,dt\,d\nu=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt;$$

(ii) ses distributions marginales s'identifient à la puissance instantanée et à la densité spectrale du signal :

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \nu)\,d\nu=|x(t)|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \nu)\,dt=|X(\nu)|^2,$$

où $X(\nu)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$;

(iii) les caractéristiques de modulation d'un signal réel (enveloppe, fréquence instantanée, retard de groupe)

sont définies de manière univoque par l'intermédiaire du signal analytique associé [2]. Rappelons que, si $x(t)$ est un signal réel, son signal analytique associé $z_x(t)$ est le signal complexe dont la partie réelle s'identifie à $x(t)$ et dont la partie imaginaire est la transformée de Hilbert de $x(t)$ [2] :

$$z_x(t)=x(t)+i\frac{1}{\pi}\mathrm{V}_p\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(u)}{t-u}du.$$

La définition fréquentielle équivalente est alors :

$$\mathrm{Z}_x(\nu)=2\,\mathrm{U}(\nu)\,\mathrm{X}(\nu),$$

où $\mathrm{U}(\nu)$ est l'échelon unité de Heaviside, ce qui revient à dire que le signal analytique est obtenu par suppression des fréquences négatives. Par définition, l'enveloppe $a_x(t)$, la fréquence instantanée $\nu_x(t)$ et le retard de groupe $t_x(\nu)$ s'en déduisent par les relations [2] :

$$a_x(t)=|z_x(t)|,$$

$$\nu_x(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\mathrm{Arg}\{z_x(t)\},$$

$$t_x(\nu)=-\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\nu}\mathrm{Arg}\{\mathrm{Z}_x(\nu)\}.$$

On montre alors que les moments locaux d'ordre un de la DWV fournissent directement $\nu_x(t)$ *et* $t_x(\nu)$ lorsque celle-ci est construite sur z_x :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\nu\,\mathrm{W}_{z_x}(t,\nu)\,d\nu\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{W}_{z_x}(t,\nu)\,d\nu=\nu_x(t),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}t\,\mathrm{W}_{z_x}(t,\nu)\,dt\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{W}_{z_x}(t,\nu)\,dt=t_x(\nu);$$

(iv) la DWV conserve les supports temporel et fréquentiel du signal :

$$|x(t)|=0,\quad |t|>T \;\Rightarrow\; \mathrm{W}_x(t,\nu)=0,\quad |t|>\mathrm{T},$$

$$|\mathrm{X}(\nu)|=0,\quad |\nu|>\mathrm{B} \;\Rightarrow\; \mathrm{W}_x(t,\nu)=0,\quad |\nu|>\mathrm{B}$$

(v) la DWV est compatible avec les translations, les changements d'échelle, les filtrages linéaires et les modulations de produit.

En contrepartie, la DWV possède des propriétés rendant son interprétation délicate :

(i) elle peut prendre des valeurs négatives, ce qui interdit de l'interpréter localement comme une densité énergétique [23];

(ii) la structure bilinéaire de la TWV crée dans le plan temps-fréquence des termes d'interaction sans signification physique immédiate [4, 21, 22]. Une étude attentive de ces limitations indique en fait quelles modifications apporter à la DWV pour rendre son utilisation plus souple et ses résultats plus facilement interprétables.

3. Lissage des DWV

La bilinéarité de la transformation (1) assure l'existence de termes d'interaction entre toutes composantes du plan temps-fréquence, en particulier entre les fréquences positives et négatives du spectre d'un signal réel. De tels termes interférentiels pourront donc être supprimés si l'on construit systématiquement la DWV d'un signal réel sur le signal analytique qui lui est associé. Outre cet avantage de clarification de la représentation [12], ceci permet de définir de manière unique les notions de fréquence et amplitude instantanées [2]. De plus, on verra au paragraphe 5 que ce choix est bien adapté à la formulation discrète de la DWV. Cependant, cette opération n'empêche nullement l'apparition de termes d'interaction entre composantes distinctes sur l'axe des fréquences positives. Une étude détaillée [21, 22] montre que de tels termes possèdent une structure fortement oscillatoire à l'inverse des composantes propres du signal qui possèdent une structure beaucoup plus régulière.

Ceci suggère de réduire l'influence des termes parasites d'interaction par une procédure appropriée de lissage et conduit à proposer une représentation modifiée :

$$(3)\quad \mathrm{C}_x(t,\nu;\mathrm{F})=\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{W}_x(t',\nu')\mathrm{F}(t-t',\nu-\nu')\,dt'\,d\nu',$$

où F est une fonction de lissage normalisée :

$$(4)\qquad \iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(t,\nu)\,dt\,d\nu=1$$

Là encore, les propriétés de telles représentations ont été abondamment discutées pour traduire sur la fonction F les contraintes imposées par l'utilisateur [5, 6] : nous n'y reviendrons pas ici.

Le point important est qu'on peut montrer que la représentation ainsi formée définit la classe la plus générale des représentations énergétiques bilinéaires admissibles, sous la seule contrainte d'invariance vis-à-vis des translations dans le plan temps-fréquence [11]. Ceci permet de retrouver la plupart des représentations proposées antérieurement comme cas particuliers de (3) [13, 14]. Citons le cas des spectrogrammes (ou densités spectrales à court terme), pour lesquels la fonction de lissage s'identifie à la DWV de la fenêtre d'observation temporelle h [8] :

$$(5)\quad \mathrm{F}_s(t,\nu)=\mathrm{W}_h(t,\nu)$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{C}_x(t,\nu;\mathrm{F}_S)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\,h^*(t-u)\,e^{-i2\pi\nu u}\,du\right|^2,$$

ou encore la « densité complexe énergétique » proposée par A. W. Rihaczek [15] :

$$(6)\quad \mathrm{F}_\mathrm{R}(t,\nu)=2\,e^{-i4\pi\nu t}$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{C}_x(t,\nu;\mathrm{F}_\mathrm{R})=x(t)\,\mathrm{X}^*(\nu)\,e^{-i2\pi\nu t},$$

où X est la transformée de Fourier de x.

Le choix d'une pondération détermine donc crucialement la méthode d'analyse retenue comme approximation lissée de la DWV initiale. De plus, les propriétés de la représentation résultante sont en un sens résumées dans la pondération choisie, ce qui, en retour, guide dans le choix de cette dernière.

Ainsi, on sait [7, 4] que les méthodes du type spectrogrammes (ou sonogrammes dans leur équivalent fréquentiel) sont fondamentalement limitées par la nécessité d'un compromis entre les résolutions temporelle et fréquentielle : améliorer la résolution fréquentielle ne peut se faire qu'au prix d'un élargissement de la durée d'observation, i. e. d'une diminution de la résolution temporelle dans une situation non stationnaire. Ceci provient directement du fait que la fonction de lissage associée, DWV de la fenêtre d'observation, possède des épanouissements temporel et fréquentiel ne pouvant être controlés séparément. On montre en effet que, pour tout signal h d'énergie unité et toute durée T, l'inégalité d'Heisenberg-Gabor se traduit sur la DWV par la relation [3] :

$$(7) \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(t-t_0)^2}{T^2} + T^2 (\nu-\nu_0)^2 \right] W_h(t, \nu)\, dt\, d\nu \geqq \frac{1}{2\pi},$$

où t_0 et ν_0 sont les date et fréquence moyennes du signal h. Les résolutions temporelle et fréquentielle étant ainsi liées, l'analyse à court-terme classique peut être considérée comme une méthode « à un degré de liberté ».

Une solution naturelle apparait alors pour améliorer cette situation : celle de passer à une analyse « à deux degrés de liberté » en choisissant, pour réaliser le lissage, une fonction séparable en ses deux variables :

$$(8) \qquad F_P(t, \nu) = g(t) . Q(\nu).$$

Un tel lissage définit la distribution pseudo-Wigner-Ville lissée (DPWVL) [32] :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & PW_x(t, \nu) = C_x(t, \nu; F_P), \\ & PW_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i 2\pi\nu\tau} q(\tau) \\ & \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u-t)\, x\left(u+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right) du \right] d\tau, \end{aligned} \right.$$

où $q(\tau)$ est la transformée de Fourier de $Q(\nu)$.

La structure d'une telle transformation prend une forme simple de corrélation pondérée et centrée sur la date de travail, suivie d'une transformation de Fourier elle-même pondérée (*fig.* 1).

Une deuxième interprétation de cette représentation est possible, qui rend plus tangible sa mise en œuvre en l'apparentant à une transformée de Fourier à court-terme modifiée. En effet, si l'on suppose dans un premier temps que [3] :

$$g(t) = \delta(t)$$

$$\text{et : } q(\tau) = \left| h\left(\frac{\tau}{2}\right) \right|^2; \qquad h(\tau) = h(-\tau),$$

la DPWV non lissée s'écrit :

$$PW_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| h\left(\frac{\tau}{2}\right) \right|^2 x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) e^{-i 2\pi\nu\tau} d\tau,$$

soit encore : $PW_x(t, \nu) = W_{x_t}(u, \nu)|_{u=t}$,

où $x_t(u) \stackrel{\Delta}{=} x(u)\, h(u-t)$ est le signal x pondéré par h autour de t. Ceci permet donc de travailler à court-terme en faisant porter l'opération de transformation de Fourier non sur une tranche de signal, comme dans le cas des spectrogrammes, mais sur le produit de celle-ci par son image en miroir. Ou, ce qui revient au même, à calculer une transformée de Fourier à court-terme dans laquelle la fenêtre de pondération serait continuellement choisie comme l'image en miroir de la tranche analysée. Cette interprétation [20] est à la base d'une propriété remarquable de la DWV : dans le cas d'un signal modulé linéairement en fréquence, sa DWV se concentre sur la loi de fréquence instantanée, quelle que soit la pente de modulation :

$$x(t) = e^{i\pi\alpha t^2} \quad \Rightarrow \quad W_x(t, \nu) = \delta(\nu - \alpha t).$$

L'extension de cette propriété à la DPWV fournit le résultat central selon lequel une telle analyse peut être considérée comme une transformée de Fourier à court-terme modifiée dans laquelle l'hypothèse, propre aux spectrogrammes, de stationnarité ou de constance dans la durée d'observation peut être remplacée par l'hypothèse plus faible d'approximation linéaire sur cette même durée. La possibilité ainsi

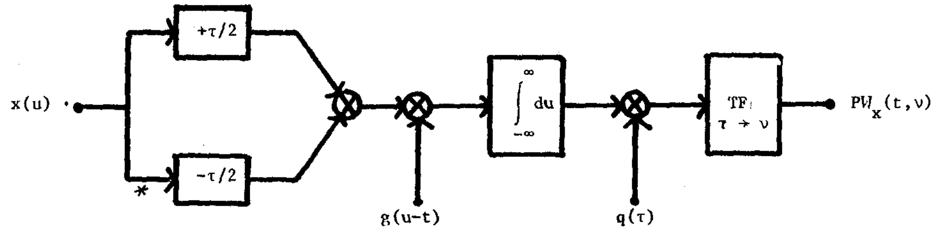


Fig. 1. — Schéma de principe de l'analyse temps-fréquence par distribution pseudo-Wigner-Ville lissée.

offerte d'élargissement de la durée d'analyse permet d'atteindre une meilleure résolution fréquentielle, la « meilleure » fenêtre d'observation étant maintenant la plus grande pour laquelle l'approximation linéaire reste valide. De plus, et toujours sous cette approximation, le choix d'une fenêtre ayant la forme d'une fonction d'autocorrélation (ex. : une fenêtre triangulaire) suffira à assurer la positivité de la représentation associée, si le signal considéré est monocomposante.

Cette « stationnarisation » locale se fait cependant au prix d'un traitement non linéaire dont l'effet secondaire est de créer des termes d'interférence entre composantes du plan temps-fréquence. Si l'on revient alors à la forme générale (9), la pondération g introduit un nouveau lissage suivant l'axe des temps. Dans l'analyse des signaux certains modulés, le rôle essentiel de ce lissage secondaire est précisément de réduire l'influence des termes d'interaction entre composantes situées autour de fréquences différentes. Une analyse précise peut être donnée [24] dont le résultat essentiel est le suivant : l'amplitude d'un terme interférentiel provenant de deux composantes distantes d'un intervalle fréquentiel $\delta\nu$ sera rendue négligeable devant l'amplitude associée à chacune des composantes si le lissage temporel se fait sur une durée au moins égale à $1/\delta\nu$.

Ainsi, la DPWL permet, par sa souplesse d'emploi, de fournir une approximation de la DWV retenant la plupart des avantages de cette dernière tout en en écartant les principaux défauts (ou plus exactement les principales difficultés d'interprétation).

Avant d'aller plus avant, il est possible d'illustrer sur un exemple comment se comporte la DPWVL vis-à-vis d'une analyse à court-terme classique, et ceci du point de vue (qui est souvent celui de l'utilisateur) de la lisibilité dans le plan temps-fréquence.

4. Un exemple

Les figures 2*b* à 2*g* comparent différentes analyses d'un signal dont la structure temps-fréquence est donnée à la figure 2*a*. Il s'agit de la superposition de deux signaux d'égales amplitudes dont les lois de fréquence instantanée sont sinusoïdales et harmoniques l'une de l'autre. Lorsque la fenêtre d'observation h est large (*fig.* 2*b* et 2*c*), la structure temps-fréquence est complètement indéchiffrable par analyse de Fourier glissante alors que la DPWV la laisse apparaître, mais noyée sous les termes d'interaction propres à la transformation de Wigner-Ville. Un choix plus

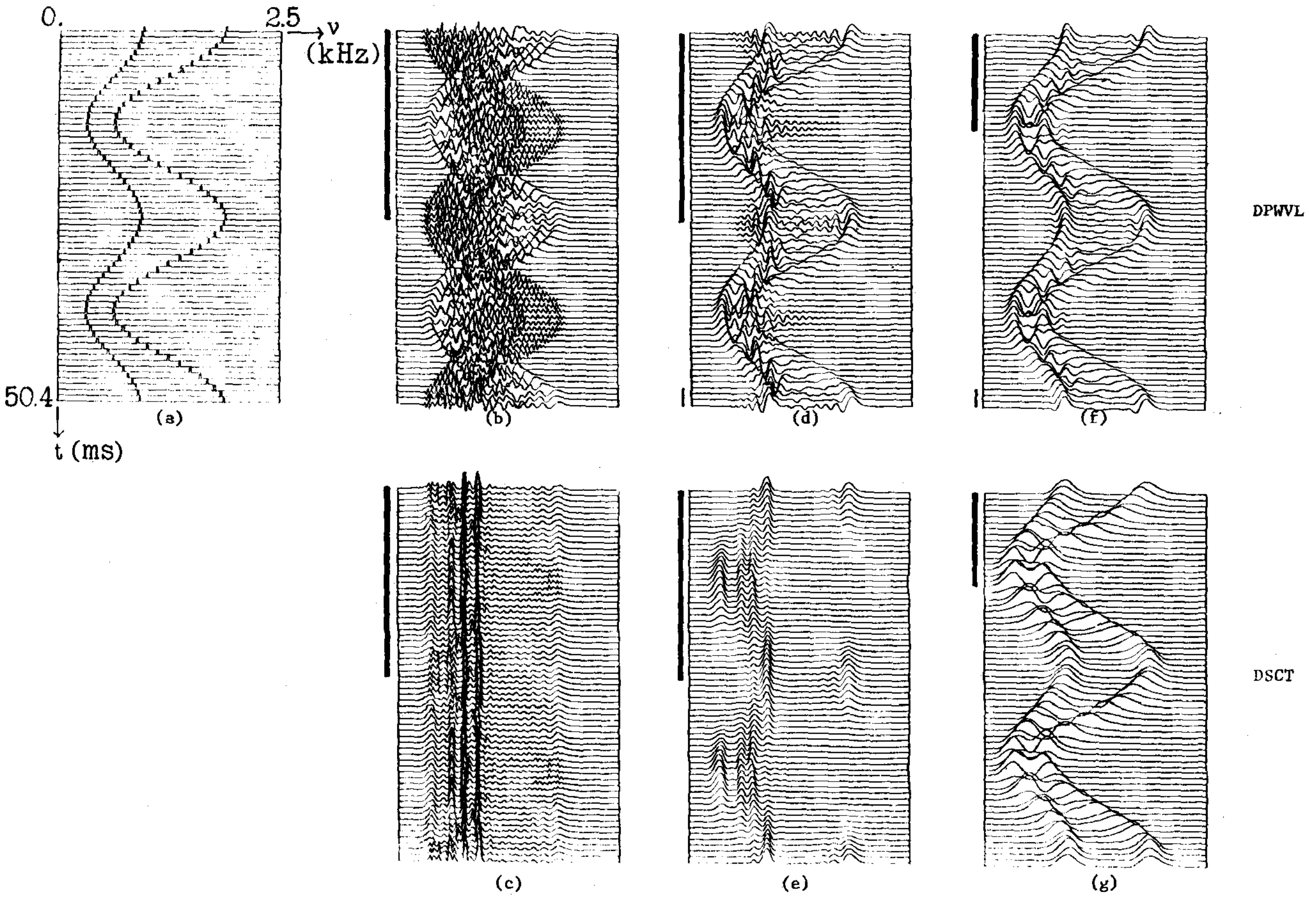


Fig. 2. — Comparaison entre distribution pseudo-Wigner-Ville lissée (DPWVL) et densité spectrale à court-terme (DSCT) sur le signal-test dont la structure temps-fréquence est donnée en (*a*). Pour chaque analyse, la largeur de la fenêtre d'observation h est représentée par le trait épais, la durée du lissage temporel (éventuel) g par le trait fin. *En haut :* DPWVL avec : (*b*) h et g rectangulaires; (*d*) (*f*) h Kaiser-Bessel et g rectangulaire. *En bas :* DSCT avec : (*c*) h rectangulaire; (*e*) (*g*) h Kaiser-Bessel.

judicieux des fonctions de pondération (*fig.* 2*d* et 2*e*) permet de faire clairement apparaître sur la DPWVL les lois recherchées, là où la transformée de Fourier à court terme utilisant la même fenêtre glissante n'y parvient pas encore. Rétrécir davantage la fenêtre d'observation n'améliore pas l'image donnée par l'analyse spectrale à court terme classique (*fig.* 2*g*). En effet, si cette dernière concentre alors son énergie en deux lois relativement bien séparées, c'est au prix :

(i) d'une résolution fréquentielle médiocre, inférieure à celle fournie par la DPWVL équivalente (*fig.* 2*f*);

(ii) d'un biais sur la détermination des lois de fréquence instantanée lorsqu'on recherche à les identifier comme lieux de concentration énergétique;

(iii) de fluctuations d'amplitude sur les lignes de crête.

Cet exemple illustre comment l'utilisation d'une DPWVL permet de dépasser le compromis inhérent à l'analyse de Fourier à court terme, assurant ainsi, outre de bonnes propriétés théoriques et pour des fenêtres d'observation équivalentes, une image plus satisfaisante dans le plan temps-fréquence.

Ce nouveau paradigme d'analyse temps-fréquence pose alors un problème de réalisation pratique des calculs et en particulier de formulation en temps discret.

5. Discrétisation et algorithme de calcul

Quoiqu'une DWV puisse être estimée par voie optique [30] ou analogique (suivant le schéma de la figure 1), une solution numérique adaptée à des signaux à temps discret est souhaitable. En fait, le passage de la DWV à temps continu (1) à une formulation à temps discret conservant l'équivalent des propriétés de la distribution initiale n'est pas un problème trivial. Une étude des différentes possibilités [26] conduit cependant à retenir comme solution satisfaisante l'expression [25] :

$$(10)\quad \tilde{W}_x(t, \nu)=2\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(t+\tau)\,\tilde{x}(t-\tau)\,e^{-i4\pi\nu\tau}$$

où $\tilde{x}$ est le signal à temps discret obtenu par échantillonnage de x à une période prise comme unité. Cette formulation, satisfaisante à bien des égards, pose néanmoins le problème d'un possible repliement spectral. En effet, si l'on considère un signal réel x correctement échantillonné au sens du critère de Shannon-Nyquist, la fonction $\tilde{W}_x$ donnée en (10) apparaît comme périodique de période 1/2 en ν, au lieu de 1 comme dans le cas du spectre du signal échantillonné : il y a donc repliement spectral si $\nu_{max}>1/4$. A cela, deux remèdes sont possibles :

(i) suréchantillonner le signal réel d'un facteur supérieur ou égal à 2;

(ii) construire la DWV discrète sur le signal analytique associé au signal réel échantillonné normalement : le repli des seules fréquences positives affecte ainsi les fréquences négatives pour lesquelles la contribution spectrale est nulle.

Étant donnés les avantages du signal analytique mentionnés plus haut, cette deuxième solution semble en général préférable. Il importe de noter que, dans les deux cas, le calcul correct d'une DWV discrète nécessite la prise en compte de deux fois plus d'échantillons qu'un spectre classique. En effet, partant d'un signal réel décrit par M échantillons, la première solution (suréchantillonnage) travaille sur un signal réel à 2 M échantillons alors que la deuxième solution (signal analytique) utilise un signal complexe dont les parties réelle et imaginaire ont chacune M échantillons ([1]). Notons qu'une troisième solution a été proposée, qui utilise une interpolation implicite du signal réel de départ [27]. L'extension de ces considérations à une DWV lissée conduit à adopter comme DPWVL à temps discret :

$$(11)\quad P\tilde{W}_x(t, \nu)=2\sum_{\tau=-N+1}^{N-1}|h_N(\tau)|^2 \times\left[\sum_{k=-M+1}^{M-1} g_M(k)\,z(t+k+\tau)\,z^*(t+k-\tau)\right]e^{-i4\pi\nu\tau},$$

où z est le signal complexe à temps discret dont la partie réelle est le signal réel échantillonné en accord avec le critère de Shannon-Nyquist et dont la partie imaginaire est la transformée de Hilbert discrète de la partie réelle ([2]). Ceci conduit au schéma de principe général de la figure 3.

La transformation finale mise en jeu est une transformation de Fourier discrète qui, en exploitant les symétries présentes, peut avantageusement se réécrire suivant [28] :

$$P\tilde{W}\left(t, \frac{n}{2N}\right)=4\left[\mathrm{Re}\left\{\sum_{\tau=0}^{N-1} e^{-i(n\tau/N)}.|h_N(\tau)|^2 \sum_{k=-M+1}^{M-1} g_M(k)\,z(t+k-\tau)\,z^*(t+k-\tau)\right\} -\frac{1}{2}|z(t)|^2\right],$$

dans le cas de fréquences discrètes $\nu=n/2N$; $n=0, 1, \ldots N$.

Cette dernière formule se prête directement à l'emploi d'une transformation de Fourier rapide (TFR), autorisant en outre le calcul d'une DPWVL à fenêtre glissante h_N de 2N points à l'aide d'une TFR à seulement N points. Le nombre d'opérations requis par cette structure de calcul permet d'envisager une

([1]) En toute rigueur, la transformée de Hilbert d'un signal à durée limitée a un support temporel infini. Nous nous contenterons de supposer ici que le signal de dimension M est formé du signal réel à durée limitée complété par suffisamment de zéros vers le passé et le futur pour que le support du signal en quadrature soit encore décrit par M échantillons avec une erreur négligeable.

([2]) On supposera que les conditions de commutation entre les opérateurs de troncature et de quadrature sont approximativement satisfaites.

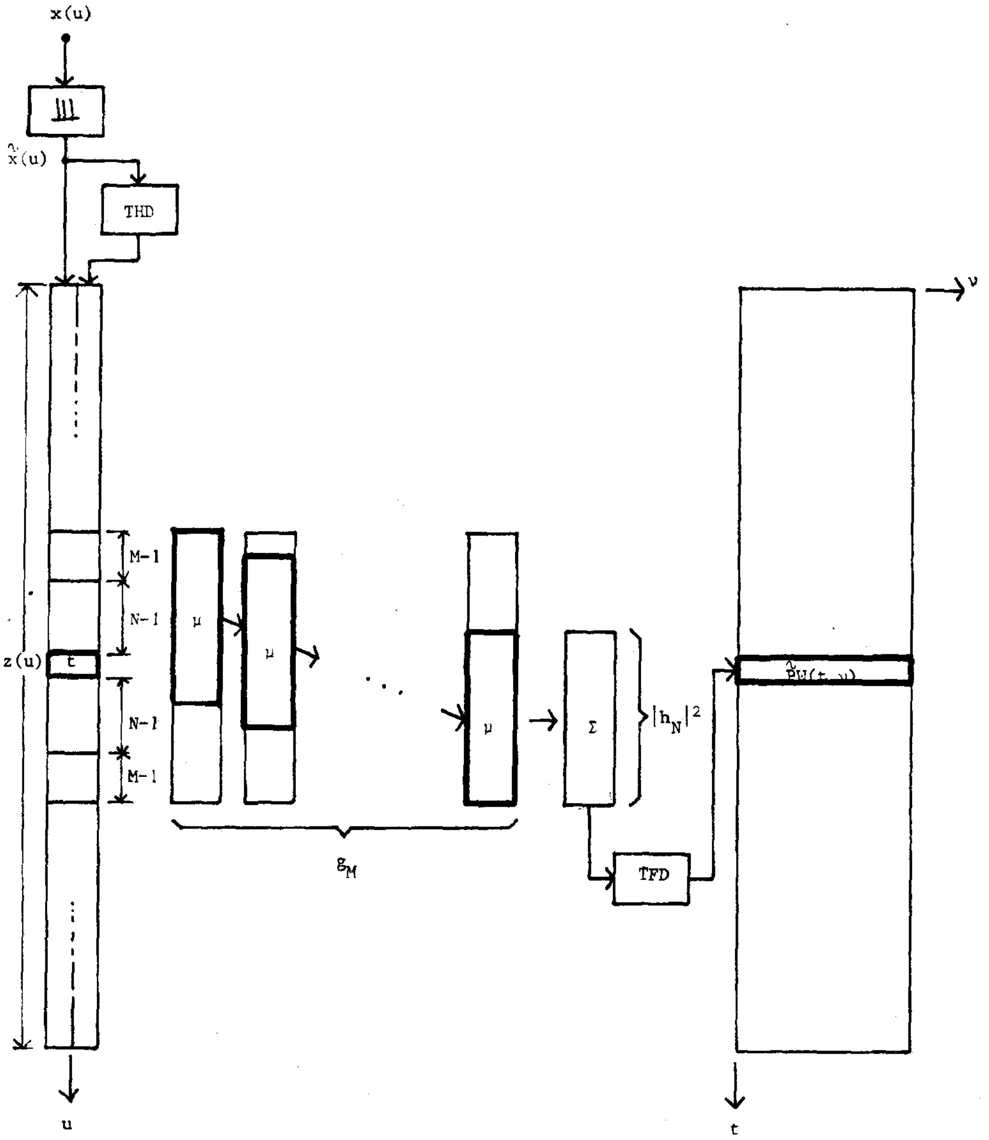


Fig. 3. — Structure de calcul en temps discret d'une distribution pseudo-Wigner-Ville lissée. ⊥⊥⊥ : échantillonnage au taux de Shannon-Nyquist; μ : multiplication de la tranche considérée par son image en miroir; THD : transformation de Hilbert discrète; TFD : transformation de Fourier discrète.

réalisation câblée en temps quasi réel, compétitive vis-à-vis des solutions classiques à bases de spectrogrammes [28, 29].

6. Extension aux signaux aléatoires non stationnaires

Si l'on suppose maintenant que x est un signal aléatoire non stationnaire de covariance K_x harmonisable, on peut montrer que la transposition des propriétés décrites au paragraphe 2 conduit à retenir comme « spectre dépendant du temps » la quantité [31] :

$$(12)\quad \bar{W}_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x\left(t+\frac{\tau}{2}, t-\frac{\tau}{2}\right) e^{-i 2\pi\nu\tau}\, d\tau.$$

Cette quantité est appelée spectre de Wigner-Ville (SWV) car, sous des conditions peu restrictives, elle n'est autre que l'espérance mathématique de la DWV construite comme intégrale stochastique sur x [31]. Outre le fait que le SWV permette de définir la notion de fréquence instantanée pour un signal aléatoire :

$$\bar{\nu}_x(t) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \nu\, \bar{W}_{z_x}(t, \nu)\, d\nu \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}_{z_x}(t, \nu)\, d\nu,$$

il possède, parmi ses nombreux avantages, celui de se réduire à la densité spectrale de puissance usuelle dans le cas d'un processus stationnaire :

$$K_x(u, v) = \Gamma_x(u-v)$$

$$\Rightarrow\quad \bar{W}_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(\tau)\, e^{-i 2\pi\nu\tau}\, d\tau.$$

Le SWV étant ainsi défini se pose le problème de son estimation. Ce problème, qui passe par celui de l'estimation de la covariance, est en fait double. En effet, si l'on ne dispose pratiquement que d'une réalisation du processus x, une hypothèse d'ergodisme est nécessaire pour autoriser l'estimation d'une moyenne d'ensemble par une moyenne temporelle, et ceci avec des propriétés statistiques d'autant meilleures que le moyennage temporel est plus important. Malheureusement, dans le cas d'un processus non stationnaire, ceci ne peut se faire qu'au prix de restrictions sur la description des non-stationnarités. Un compromis satisfaisant peut cependant être trouvé dans le cas quasi stationnaire : une classe générale des estimateurs envisageables est alors décrite par (3), en considérant W_x comme la DWV de la réalisation [34]. L'étude statistique de tels estimateurs conduit encore à privilégier les DPWVL [32, 33, 34]. Dans ce cadre, l'utilisation d'un lissage décrit par une fonction séparable permet de découpler biais et corrélation suivant les axes temps et fréquence. Le lissage temporel a pour effet essentiel de réduire la variance d'estimation. Dans le cas de processus localement stationnaires, on montre que cette procédure d'estimation est particulièrement bien adaptée [34]. Elle peut alors être optimisée dans le choix des paramètres d'analyse en identifiant les zones de stationnarité locale du processus étudié [35].

7. Conclusion

L'ensemble des propriétés de la DWV et du SWV confère à la transformation de Wigner-Ville un rôle central comme outil d'analyse dans le plan temps-fréquence. A l'instar de toute méthode, son utilisation nécessite cependant des précautions d'emploi et d'interprétation. On a essayé ici de cerner l'essentiel de celles-ci, justifiant à la fois les limitations propres des analyses à court terme classiques et l'introduction pour la DWV d'une approximation satisfaisante et souple d'emploi : la DPWVL. Celle-ci, outre le fait qu'elle exploite au mieux les deux degrés de liberté du plan temps-fréquence, a permis une justification simple de ses bonnes propriétés de résolution, guidant ainsi dans le choix des paramètres d'analyse. D'une manière un peu schématique, on peut considérer que la transformation de Wigner-Ville permet de dépasser les limitations propres aux traitements linéaires de situations non stationnaires, en forçant en quelque sorte une « stationnarisation » locale par une opération non linéaire. Le prix à payer pour cette dernière (valeurs négatives de la représentation et termes d'interférence) peut alors être minimisé par un choix adéquat des lissages adoptés.

On dispose ainsi d'un outil d'analyse puissant, dont l'utilisation a déjà prouvé l'efficacité dans des applications concrètes. On peut citer le cas de l'optimisation de haut-parleurs par analyse temps-fréquence des réponses impulsionnelles [36], celui de l'étude de rythmes circadiens [37, 41], ou encore celui de l'analyse d'échos radar [38], de signaux sismiques [39] ou de parole [40]. Seul le problème de l'analyse a été considéré ici mais de nouvelles applications se font jour depuis qu'une solution efficace au problème de synthèse a été proposée [42]. La DWV se trouve être ainsi un outil bien adapté pour des problèmes de filtrage dans le plan temps-fréquence, optimisation de fenêtres d'analyse, de réponses de filtres,...

S'étant également placés ici dans un cadre volontairement non paramétrique, nous n'avons pas considéré les améliorations que peuvent apporter aux spectrogrammes classiques des méthodes comme l'analyse spectrale AR évolutive [17] ou les modèles ARMA dépendant du temps [18]. L'intérêt de ces méthodes est indéniable mais leur comparaison n'est pas chose facile [7, 19], faute d'un cadre théorique commun. Ce dernier serait pourtant souhaitable de telle sorte que la méthode proposée ici puisse éventuellement incorporer des modélisations, ou en tout cas que les domaines d'application privilégiés des deux approches, paramétrique et non paramétrique, soient mieux cernés.

Manuscrit reçu le 4 *octobre* 1984.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Définition et propriétés de la distribution de Wigner-Ville.*

[1] E. P. WIGNER, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.*, 40, 1932, p. 749-759.

[2] J. VILLE, Théorie et applications de la notion de signal analytique, *Cables et Transm.*, 2 A, (1), 1948, p. 61-74.

[3] T. A. C. M. CLAASEN et W. F. G. MECKLENBRAUKER, The Wigner distribution-A tool for time-frequency signal analysis. Part I : Continuous-time signals, *Philips J. Res.*, 35, (3), 1980, p. 217-250.

[4] B. BOUACHACHE et P. FLANDRIN, Wigner-Ville analysis of time-varying signals, *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP*-82, Paris, 1982, p. 1329-1332.

2. *Autres représentations et études comparatives.*

[5] B. ESCUDIÉ, Représentation en temps et fréquence des signaux d'énergie finie : analyse et observation des signaux, *Ann. Télécom.*, 34, (3-4), 1979, p. 101-111.

[6] T. A. C. M. CLAASEN et W. F. G. MECKLENBRÄUKER, The Wigner distribution-A tool for time-frequency signal analysis. Part III : Relations with other time-frequency signal transformations, *Philips J. Res.*, 35, (6), 1980, p. 372-389.

[7] H. FARGETTON, R. GENDRIN et J. L. LACOUME, Adaptive methods for spectral analysis of time-varying signals, in *Signal Processing: theories and applications-II*, M. KUNT et F. DE COULON eds., North-Holland, Amsterdam, 1980, p. 787-792.

[8] J. B. ALLEN et L. R. RABINER, A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis, *Proc. IEEE*, 65, (11), 1977, p. 1558-1564.

[9] P. FLANDRIN et B. ESCUDIÉ, Sur la localisation des représentations conjointes dans le plan temps-fréquence, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 295, série I, 1982, p. 475-479.

[10] A. J. E. M. JANSSEN On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane, *Philips J. Res.*, 37, 1982, p. 79-110.

[11] P. FLANDRIN Représentations des signaux dans le plan temps-fréquence, *Thèse D.I.*, INPG, Grenoble, 1982.

[12] B. BOUACHACHE, Représentation temps-fréquence-Application à la mesure de l'absorption du sous-sol, *Thèse D. I.*, INPG, Grenoble, 1982.

[13] L. COHEN, Generalized phase-space distribution functions, *J. Math. Phys.*, 7, 1966, p. 781-786.

[14] B. ESCUDIÉ et J. GRÉA, Sur une formulation générale de la représentation en temps et fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie, *C.R. Ac. Sc. Paris*, 283, série A, 1976, p. 1049-1051.

[15] A. W. RIHACZEK, Signal energy distribution in time and frequency, *IEEE Trans. on Inf. Theory*, IT-14, 1968, p. 369-374.

[16] P. FLANDRIN et W. MARTIN, Sur les conditions physiques assurant l'unicité de la représentation de Wigner-Ville comme représentation temps-fréquence, 9[e] *Coll. GRETSI*, Nice, 1983, p. 43-49.

[17] N. MARTIN, Développement de méthodes d'analyse spectrale autorégressive. Applications à des signaux réels non-stationnaires ou à N dimensions, *Thèse D.I.*, INPG, Grenoble, 1984.

[18] Y. GRENIER, Time-dependent ARMA modeling of non-stationary signals, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-31, 1983, p. 899-911.

[19] Y. GRENIER et D. ABOUTAJDINE, Comparaison des représentations temps-fréquence de signaux présentant des discontinuités spectrales, *Ann. Télécom.*, 38, (11-12), 1983, p. 429-442.

3. Problèmes d'interprétation.

[20] P. FLANDRIN et B. ESCUDIÉ, An interpretation of the pseudo-Wigner-Ville distribution, *Sig. Proc.*, 6, (1), 1984, p. 27-36.

[21] P. FLANDRIN et B. ESCUDIÉ, Géométrie des fonctions d'ambiguité et des représentations conjointes de Ville : l'approche de la théorie des catastrophes, 8[e] *Coll. GRETSI*, Nice, 1981, p. 69-74.

[22] F. HLAWATSCH, Interference terms in the Wigner distribution, in *Digital Signal Processing*-84, V. CAPPELLINI et A. G. CONSTANTINIDES eds., North-Holland, Amsterdam, 1984, p. 363-367.

[23] T. A. C. M. CLAASEN et W. F. G. MECKLENBRÄUKER, On the time-frequency discrimination of energy distributions: can they look sharper than Heisenberg? *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ICASSP-84, San Diego, 1984, p. 41 B 7.1-41 B 7.4.

[24] P. FLANDRIN, Some features of time-frequency representations of multicomponent signals, *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ICASSP-84, San Diego, 1984, p. 41 B 4.1-41 B 4.4.

4. *Problèmes de calcul et de discrétisation.*

[25] T. A. C. M. CLAASEN et W. F. G. MECKLENBRÄUKER, The Wigner distribution-A tool for time-frequency signal analysis. Part II: Discrete-time signals, *Philips J. Res.*, 35, (4-5), 1980, p. 276-300.

[26] T. A. C. M. CLAASEN et W. F. G. MECKLENBRÄUKER, The aliasing problem in discrete-time Wigner distributions, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-31, (5), 1983, p. 1067-1072.

[27] G. F. BOUDREAUX-BARTELS et T. W. PARKS, Reducing aliasing in the Wigner distribution using implicit spline interpolation, *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ICASSP-83, Boston, 1983, p. 1438-1441.

[28] P. FLANDRIN, W. MARTIN et M. ZAKHARIA, On a hardware implementation of the Wigner-Ville transform, in *Digital Signal Processing*-84, V. CAPPELLINI et A. G. CONSTANTINIDES, eds., North-Holland, Amsterdam, 1984, p. 262-266.

[29] D. CHESTER, F. J. TAYLOR et M. DOYLE, Application of the Wigner distribution to speech processing, *IEEE ASSP Spectrum Estimation Workshop II*, Tampa, 1983, p. 98-102.

[30] H. O. BARTELT, K. H. BRENNER et A. W. LOHMANN, The Wigner distribution function and its optical production, *Opt. Commun.*, 32, 1980, p. 32-38.

5. *Définition et estimation du spectre de Wigner-Ville.*

[31] W. MARTIN, Time-frequency analysis of random signals, *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ICASSP-82, Paris, 1982, p. 1325-1328.

[32] W. MARTIN et P. FLANDRIN, Analysis of non-stationary processes: short-time periodograms versus a pseudo-Wigner estimator, in *Signal Processing: theories and applications II*, H. SCHÜSSLER ed., North-Holland, Amsterdam, 1983, p. 455-458.

[33] P. FLANDRIN et W. MARTIN, Pseudo-Wigner estimators for the analysis of non-stationary processes, *IEEE ASSP Spectrum Estimation Workshop II*, Tampa, 1983, p. 181-185.

[34] P. FLANDRIN et W. MARTIN, A general class of estimators for the Wigner-Ville spectrum of non-stationary processes, in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 62, Springer, Berlin, 1984, p. 15-25.

[35] W. MARTIN et P. FLANDRIN, Detection of changes of signal structure by using the Wigner-Ville spectrum, *Sig. Proc.*, 8, (2), 1985, p. 215-233.

6. *Applications*

[36] C. P. JANSE et A. J. M. KAISER, Time-frequency distributions of loudspeakers: the application of the Wigner distribution, *J. Audio. Eng. Soc.*, 31, (4), 1983, p. 198-223.

[37] W. MARTIN, Measuring the degree of non-stationarity by using the Wigner-Ville spectrum, *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ICASSP-84,, San Diego, 1984, p. 41 B 3.1-41 B 3.4.

[38] P. BERTRAND et C. FUGIER-GARREL, Formulation de la théorie de la communication dans le plan temps-fréquence — Aspects pratiques, 8[e] *Coll. GRETSI*, Nice, 1981, p. 829-834.

[39]B. BOUACHACHE, B. ESCUDIÉ et J. M. KOMATITSCH, Sur la possibilité d'utiliser la représentation conjointe en temps et fréquence dans l'analyse des signaux modulés en fréquence émis en vibrosismique, 7[e] *Coll. GRETSI*, Nice, 1979, p. 121/1-121/6.

[40] M. D. RILEY, Detecting time-varying spectral energy concentrations, *IEEE Digital Signal Processing Workshop*, Chatham, 1984, p. 5.6.1-5.6.2.

[41] T. KREUELS, R. JOERRES, W. MARTIN et K. BRINKMANN System analysis of the circadian rythm of *Euglena Gracilis*, II: masking effects and interactions of light and temperature responses, *Z. Naturforsch.*, 39 c, 1984, p. 801-811.

[42] G. F. BOUDREAUX-BARTELS et T. W. PARKS, Signal estimation using modified Wigner distributions, *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ICASSP-84, San Diego, 1984, p. 22.3.1-22.3.4.